7. Захаров Е. В., Собянина И. В. *Об одномерных интегро-дифференциальных уравнениях задач дифракции на экранах* // Журн. выч. матем. и матем. физ. – 1986. – Т. 26. – № 4. – С. 632–636.

8. Панасюк В. В., Саврук М. П., Назарчук З. Т. *Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции.* – Киев: Наукова думка, 1984. – 344 с.

9. Ахмадиев М. Г. *Прямые методы решения некоторых сингулярных интегро-дифференциальных уравнений.* // Казань:Деп. в ВИНИТИ. – 1986. – № 43. – 18 с.

10. Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань.: Изд-во КГУ, 1980. – 232 с.

11. Натансон П. Н. *Конструктивная теория функций.* – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – 688 с.

APPROXIMATE METHODS OF SOLUTION OF SINGULAR INTEGRO–DIFFERENTIAL EQUATIONS OF DIFFRACTION

M.G. Akhmadiev

For numerical solution of singular integro–differential equations of diffraction it is used the method of mechanical quadratures. It is proved that this method is stable under small perturbations of approximating equations.

Keywords: approximate methods, diffraction problem, method of the mechanical squarings, singular and integro–differential equations, approximating equations, operators equations.

УДК 517.51

ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ СУММАМИ ФУРЬЕ ПО КРАТНОЙ СИСТЕМЕ ВСПЛЕСКОВ С КОМПАКТНЫМИ НОСИТЕЛЯМИ

Ш.А. Балгимбаева[1]

1 *sholpan.balgyn@gmail.com*; Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

Получены точные по порядку оценки приближения гиперболическими суммами Фурье по кратной системе всплесков с компактными носителями на классах типа Никольского–Бесова и Лизоркина–Трибеля в пространстве L_q для всевозможных значений параметров классов и пространства.

Ключевые слова: поперечники Фурье, гиперболический крест, пространства типа Никольского–Бесова, пространства типа Лизоркина–Трибеля.

Пусть $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}$ — множества натуральных, действительных и целых чисел соответственно; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$.

Пусть $L_q = L_q([0,1]^d)$ $(1 \le q \le \infty, 2 \le d \in \mathbb{N})$ — пространство измеримых функций $f : [0,1]^d \to \mathbb{C}$, суммируемых в степени q (при $q = \infty$ существенно ограниченных) на $[0,1]^d$ со стандартной нормой

$$\| f \mid L_q \| = \| f \mid L_q([0,1]^d) \| = \left(\int_{[0,1]^d} |f(x)|^q dx \right)^{1/q} (1 \le q < \infty),$$

$$\| f \mid L_\infty \| = \| f \mid L_\infty([0,1]^d) \| = \operatorname{ess\,sup} \{ |f(x)| : x \in [0,1]^d \}.$$

Пусть $\Phi = \{\phi_\iota \mid \iota \in \mathrm{J}\}$ – счетное семейство функций в L_∞, ортонормальное в L_2, и пусть $\{J(n) \subset \mathrm{J} \mid n \in \mathbb{N}\}$ такое, что $J(n) \subset J(n+1)$ и $\# J(n) < \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $\cup_{n\in\mathbb{N}} J(n) = \mathrm{J}$.

Для $f \in L_1$ мы рассмотрим сумму Фурье по системе Φ в виде

$$S_n^\Phi(f,x) = \sum_{\iota \in J(n)} \langle f, \phi_\iota \rangle \phi_\iota(x),$$

где $\langle f, g\rangle = \int_{[0,1]^d} f(x)\overline{g}(x)\,dx$ ($\overline{z}$ – число, комлексно-сопряженное к $z \in \mathbb{C}$).

Для множества $\mathrm{F} \in L_q$ обозначим

$$E_n(\mathrm{F}, \Phi, L_q) = \sup\{\|f - S_n^\Phi(f,x) \mid L_q\| \mid f \in \mathrm{F}\}. \tag{1}$$

Нами получены (точные по порядку) оценки приближения гиперболическими крестами по системе $\psi^{(\mathrm{d})}$ классов типа Никольского-Бесова и Лизоркина-Трибеля, заданных по системе всплесков с компактными носителями, в пространстве $L_q([0,1]^d)$ для всевозможных значений параметров классов и пространства.

Введем некоторые обозначения. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\mathrm{z}_d = \{1, \ldots, d\}$; $k \in \mathbb{N}:\ k \le d$. Фиксируем мультииндекс $\mathrm{d} = (d_1, \ldots, d_k) \in \mathbb{N}^k$ так, что $d_1 + \cdots + d_k = d$, и представим $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ в виде $x = (x^1, \ldots, x^k)$, где $x^\kappa \in \mathbb{R}^{n_\kappa}$, $\kappa \in \mathrm{z}_k$.

Обозначим

$$\mathrm{e}^d = \mathrm{e}^d(0) = \{0,1\}^d,\ \ \mathrm{e}^d(1) = \mathrm{e}^d \setminus \{(0,\ldots,0)\};$$

$$\Xi(d,j) = \mathbb{Z}^d \cap [0, 2^j - 1]^d,\ j \in \mathbb{N}_0.$$

Пусть масштабирующая функция $\psi^{(0)}$ и соответствующая всплеск–функция $\psi^{(1)}$ имеют компактный носитель:

$$\operatorname{supp}\psi^{(0)} \cup \operatorname{supp}\psi^{(1)} \subset [0, 2N-1] \text{ for some } N > 0;$$

$\psi^{(0)}, \psi^{(1)} \in C^r(\mathbb{R})$.

Далее, d-кратная всплеск-система, определяется как

$$\psi^{(\mathrm{d})} = \{\psi^\iota_{\alpha\sigma}(x) \ \mid\ \iota \in \mathrm{e}^{\mathrm{d}}(\alpha),\ \sigma \in \Xi(\mathrm{d}, \alpha),\ \alpha \in \mathbb{N}_0^k\},$$

где

$$\psi^\iota_{\alpha\sigma}(x) = \prod_{\kappa=1}^{k} \psi^{\iota^\kappa}_{\alpha_\kappa \sigma^\kappa}(x^\kappa),\ \ \psi^{\iota^\kappa}_{j\sigma^\kappa}(x^\kappa) = 2^{\frac{j d_\kappa}{2}} \psi^{\iota^\kappa}(2^j x^\kappa - \sigma^\kappa);$$

$$\psi^{\iota^\kappa}(x^\kappa) = \prod_{\nu \in \mathrm{k}_\kappa} \psi^{(\iota_\nu)}(x_\nu),$$

здесь

$$\mathrm{e}^{\mathrm{d}}(\alpha) = \mathrm{e}^{d_1}(\operatorname{sign}(\alpha_1)) \otimes \cdots \otimes \mathrm{e}^{d_k}(\operatorname{sign}(\alpha_k)),$$

$$\sigma(\mathrm{d}, \alpha) = \sigma(d_1, \alpha_1) \times \cdots \times \sigma(d_k, \alpha_k).$$

Известно, что система $\psi^{(\mathrm{d})}$ является ортонормированной в $L_2([0,1]^d)$. Кроме того, система $\psi^{(\mathrm{d})}$ является безусловным базисом $L_q([0,1]^d)$ при $1 < q < \infty$. В случае $k = 1$ этот факт доказан в [1, гл. 8]. Случай $k > 1$ следует отсюда, т. к. система $\psi^{(\mathrm{d})}$ (по переменной x) есть тензорное произведение систем $\psi^{(d_\kappa)}$ (по переменным x^κ), $\kappa \in \mathrm{z}_k$.

Определим оператор Δ_α^ψ ($\alpha \in \mathbb{N}_0^k$) следующим образом: пусть для $f \in L_1$

$$\Delta_\alpha^\psi(f,x) = \sum_{\iota\in \mathrm{e}^{\mathrm{d}}(\alpha)} \sum_{\sigma\in\Xi(\mathrm{d},\alpha)} f_{\alpha\sigma}^\iota \psi_{\alpha\sigma}^\iota(x)$$

диадическая пачка, где

$$f_{\alpha\sigma}^\iota = \int_{[0,1]^d} f(x)\,\psi_{\alpha\sigma}^\iota(x)\,dx.$$

Кроме того, для $f \in L_1$ определим ее суммы Фурье по системе $\psi^{(\mathrm{d})}$ по гиперболическим крестам (для фиксированного $\sigma = (\sigma_1,\dots,\sigma_k) \in \mathbb{R}_+^k$):

$$S_n^{\psi,\sigma}(f,x) = \sum_{\alpha\sigma\le n} \Delta_\alpha^\psi(f,x) \quad (n\in\mathbb{N})$$

(здесь $\alpha\sigma := \alpha_1\sigma_1 + \ldots + \alpha_k\sigma_k$). Далее будем обозначать величину (1) с $S_n^{\psi,\sigma}$ вместо S_n^Φ как $E_n^\sigma(\mathrm{F}, L_q)$.

Пусть $1 \le p,\theta \le \infty$ и пусть $\ell_\theta \equiv \ell_\theta(\mathbb{N}_0^k)$ – пространство последовательностей комплексных чисел $(c_\alpha) = (c_\alpha \,|\, \alpha \in \mathbb{N}_0^k)$ с конечной нормой

$$\|(c_\alpha)\,|\,\ell_\theta\| = \Big(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^k} |c_\alpha|^\theta\Big)^{1/\theta} \ (1\le\theta<\infty), \ \ \|(c_\alpha)\,|\,\ell_\infty\| = \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^k} |c_\alpha|;$$

пусть $\ell_\theta(L_p) \equiv \ell_\theta(L_p([0,1]^d))$ (соответственно $L_p(\ell_\theta) \equiv L_p([0,1]^d;\ell_\theta)$) — пространство функциональных последовательностей $(g_\alpha(x)) = (g_\alpha(x)\,|\,\alpha\in\mathbb{N}_0^k)$ ($x \in [0,1]^d$) с конечной нормой

$$\|\,(g_\alpha(x))\,|\,\ell_\theta(L_p)\,\| = \|\,(\,\|\,g_\alpha\,|\,L_p\,\|)\,|\,\ell_\theta\,\|$$

(соответственно

$$\|\,(g_\alpha(x))\,|\,L_p(\ell_\theta)\,\| = \|\,\|\,(g_\alpha(\cdot))\,|\,\ell_\theta\,\|\,|\,L_p\,\|\,).$$

Введем функциональные пространства (и классы), которые будем рассматривать далее.

Определение. *Пусть* $s = (s_1,\dots,s_k) \in \mathbb{R}_+^k$, $1 \le p,\theta \le \infty$. *Тогда*

i) *пространство типа Никольского–Бесова* $\psi B_{p\theta}^{s\mathrm{d}} \equiv \psi B_{p\theta}^{s\mathrm{d}}([0,1]^d)$, *связанное с системой* $\psi^{(\mathrm{d})}$, *состоит из всех функций* $f \in L_p$, *для которых конечна норма*

$$\|\,f\,|\,\psi B_{p\theta}^{s\mathrm{d}}\,\| = \|(2^{\alpha s}\Delta_\alpha^\psi(f,x))\,|\,\ell_\theta(L_p)\|;$$

ii) *пространство типа Лизоркина–Трибеля* $\psi L_{p\theta}^{s\mathrm{d}} \equiv \psi L_{p\theta}^{s\mathrm{d}}([0,1]^d)$, *связанное с системой* $\psi^{(\mathrm{d})}$, *состоит из всех функций* $f \in L_p$, *для которых конечна норма*

$$\|\,f\,|\,\psi L_{p\theta}^{s\mathrm{d}}\,\| = \|(2^{\alpha s}\Delta_\alpha^\psi(f,x))\,|\,L_p(\ell_\theta)\|.$$

Единичные шары $\psi\mathrm{B}_{p\theta}^{s\mathrm{d}} \equiv \psi\mathrm{L}_{p\theta}^{s\mathrm{d}}([0,1]^d)$ *и* $\psi\mathrm{L}_{p\theta}^{s\mathrm{d}} \equiv \psi\mathrm{L}_{p\theta}^{s\mathrm{d}}([0,1]^d)$ *этих пространств будем называть классами Никольского-Бесова и Лизоркина-Трибеля, связанными с системой* $\psi^{(\mathrm{d})}$ *соответственно.*

Нетрудно показать, что если $r > s$, то пространства $\psi B^{s\mathrm{d}}_{p\theta}([0,1]^d)$ и $\psi B^{s\mathrm{d}}_{p\theta}([0,1]^d)$ совпадают соответственно с пространствами $B^{sm}_{p\theta}([0,1]^d)$ и $L^{sm}_{p\theta}([0,1]^d)$ обобщенной смешанной гладкости на единичном кубе $[0,1]^d$, которые есть непериодический аналог пространств периодических функций, изученных в [2].

Если $s_j > r_j$, $j \in \mathrm{e}_d$, тогда мы имеем другие классы и теоремы, которые представляют основные результаты работы, являются обобщениями результатов по приближениям по гиперболическим крестам функциональных классов $\chi \mathrm{B}^{s\mathrm{d}}_{p\theta}$ и $\chi \mathrm{L}^{s\mathrm{d}}_{p\theta}$, определенных с помощью n-кратной системы Хаара (соответственно при $r = 0$) [3].

Положим $p_* = \min\{p,2\}$, $\varsigma_\kappa = \frac{s_\kappa}{d_\kappa}$; без потери общности, мы будем считать $\varsigma \equiv \min\{\varsigma_\kappa \mid \kappa \in \mathrm{z}_k\} = \varsigma_1 = \ldots = \varsigma_\omega < \varsigma_\kappa$, $\kappa \in \mathrm{z}_k \setminus \mathrm{z}_\omega$ для некоторого $\omega \in \mathrm{z}_k$. Рассмотрим вектор $\varsigma' = (\varsigma'_1, \ldots, \varsigma'_k)$ такой, что $\varsigma = \varsigma'_1 = \ldots = \varsigma'_\omega < \varsigma'_\kappa < \varsigma_\kappa$, $\kappa = \omega+1, \ldots, k$, и положим $s' = (s'_1, \ldots, s'_k)$ с $s'_\kappa = \varsigma'_\kappa d_\kappa$ $(\kappa \in \mathrm{z}_k)$ и $\gamma = \frac{1}{\varsigma} s'$.

Ниже мы будем использовать символы $\ll$ и $\asymp$, чтобы показать отношения между порядками величин: для функций $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ и $H : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ пишем $F(u) \ll H(u)$ при $u \to \infty$, если существует постоянная $C = C(F,H) > 0$ такая, что неравенство $F(u) \le CH(u)$ имеет место для $u \ge u_0 > 0$, и $F(u) \asymp H(u)$, если $F(u) \ll H(u)$ и $H(u) \ll F(u)$ одновременно.

Для числа $a \in \mathbb{R}$ положим $a_+ = \max\{a,0\}$; ниже, $\log$ – логарифм по основанию 2.

Теорема 1. *Пусть $1 < q \le p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ и $s \in \mathbb{R}^k_+$. Тогда*

$$E^\sigma_n(\psi \mathrm{B}^{s\mathrm{d}}_{p\theta}, L_q) \asymp 2^{-\varsigma n} n^{(\omega-1)(\frac{1}{p_*}-\frac{1}{\theta})_+}.$$

Если, кроме того, $1 < p < \infty$, тогда $E^\sigma_n(\psi \mathrm{L}^{s\mathrm{d}}_{p\theta}, L_q) \asymp 2^{-\varsigma n} n^{(\omega-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}$. Кроме этого, $E^\sigma_n(\psi \mathrm{L}^{s\mathrm{d}}_{1\theta}, L_1) \asymp 2^{-\varsigma n} n^{(\omega-1)(1-\frac{1}{\theta})_+}$.

Эта теорема – аналог теоремы 4.1 из [2] и аналог теоремы 1 из [3] для классов Никольского–Бесова и Лизоркина–Трибеля, связанных с системой $\psi^{(\mathrm{d})}$.

Теорема 2. *Пусть $1 \le p < q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ и $s \in \mathbb{R}^k_+$ такое, что $\varsigma > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Тогда*

$$E^\sigma_n(\psi \mathrm{B}^{s\mathrm{d}}_{p\theta}, L_q) \asymp 2^{-(\varsigma-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})n} n^{(\omega-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})_+}; \quad E^\sigma_n(\psi \mathrm{L}^{s\mathrm{d}}_{p\theta}, L_q) \asymp 2^{-(\varsigma-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})n}.$$

Теорема 3. *Пусть $1 \le p,\theta \le \infty$ и $s \in \mathbb{R}^k_+$ такое, что $\varsigma > \frac{1}{p}$. Тогда*

$$E^\sigma_n(\psi \mathrm{B}^{s\mathrm{d}}_{p\theta}, L_\infty) \asymp 2^{-(\varsigma-\frac{1}{p})n} n^{(\omega-1)(1-\frac{1}{\theta})_+}.$$

Если, кроме того, $p < \infty$, тогда

$$E^\sigma_n(\psi \mathrm{L}^{s\mathrm{d}}_{p\theta}, L_\infty) \asymp 2^{-(\varsigma-\frac{1}{p})n} n^{(\omega-1)(1-\frac{1}{p})}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта № 5130/ГФ4 Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан.

Литература

1. Wojtaszczyk P. *A mathematical introduction to wavelets.* – Cambridge.: CUP, 1997. – 261 p.

2. Базарханов Д. Б. *Приближение всплесками и поперечники Фурье классов периодических функций многих переменных. I* // Тр. МИ РАН. – 2010. – Т. 269. – С. 8–30.

3. Bazarkhanov, D.B.: Hyperbolic cross approximation of some function classes w. r. t. multiple Haar system on the unit cube // Springer Conference Proceedings. — 2017.

HYPERBOLIC CROSS APPROXIMATION OF SOME MULTIVARIATE FUNCTION CLASSES W. R. T. WAVELET SYSTEM WITH COMPACT SUPPORTS

Sh. Balgimbayeva

We obtain estimates, sharp in order, for hyperbolic cross approximation w.r.t. d*–multiple wavelet system with compact supports* $\psi^{(\mathrm{d})}$ *of the Nikol'skii – Besov and Lizorkin – Triebel type classes associated with this system in the space* $L_q([0,1]^d)$ *for a number of relations between the parameters of the classes and the space.*

Keywords: Fourier width, hyperbolic cross, the Nikol'skii – Besov type space, the Lizorkin – Triebel type space.

УДК 621.391.1 : 519.6

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ НА ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ

А.А. Барышев[1], Г.А. Бондаренко[2], Д.С. Лукомский[3]

1 *baryshevaa@gmail.com*; Саратовский национальный исследовательский государственный университет
2 *gebond77@gmail.com*; Саратовский национальный исследовательский государственный университет
3 *lukomskiids@info.sgu.ru*; Саратовский национальный исследовательский государственный университет

В статье обсуждается реализация численного алгоритма быстрого дискретного преобразования Фурье на локальных полях положительной характеристики. В качестве примера применения алгоритма приводится сжатие изображений.

Ключевые слова: дискретное преобразование Фурье, локальные поля, численный алгоритм, сжатие изображений.

Данная работа посвящена вопросу численной реализации быстрого преобразования Фурье на локальных полях, рассмотренного в работе С.Ф. Лукомского и А.М. Водолазова [1]. Необходимо отметить, что в настоящее время в информационных технологиях активно применяются алгоритмы, использующие различные свойства преобразования Фурье по разнообразным системам. Будем рассматривать применение алгоритма на примере сжатия изображений.

Под локальным полем K понимают локально компактное, вполне несвязное, недискретное, полное топологическое пространство, в котором определены непрерывные операции "$\dot{+}$", "$\cdot$" – сложения и умножения, для которых выполнены акси-